Anuitas

Anuitas berasal dari kata bahasa Inggris annuity yang dapat didefinisikan sebagai rangkaian pembayaran atau penerimaan **tetap** dalam jumlah tertentu yang dilakukan secara berkala pada jangka waktu tertentu. Kata *annuity* asalnya berarti pembayaran annual (tahunan), akan tetapi seiring dengan berjalannya waktu kata anuitas juga mencakup pembayaran yang dilakukan pada interval waktu yang lain juga, seperti pembayaran bulanan, tiga bulanan, dan seterusnya.

Anuitas bukan barang baru lagi dalam kehidupan ekonomi kita. Tetangga kita yang menyewa rumah, atau Orang tua kita yang membelikan motor untuk kita secara kredit, atau pun uang tabungan kita di bank yang setiap bulan mendapatkan bunga, semuanya merupakan contoh kongkrit dari anuitas. Jadi sekali lagi kita tegaskan bahwa anuitas bukan barang baru bagi kita.

Anuitas yang pembayarannya pasti untuk periode jangka waktu tertentu dinamakan anuitas pasti atau *annuity-certain*. Contoh untuk anuitas pasti antara lain adalah pembayaran **kredit motor**, pembayaran **premi asuransi pendidikan**. Disamping anuitas pasti, ada juga anuitas tidak pasti. Anuitas yang pembayarannya tidak pasti dinamakan anuitas *contingent*. Tipe yang umum dari anuitas contingent ini adalah suatu anuitas dengan pembayaran dilakukan selama orang tersebut masih hidup. Anuitas seperti itu dinamakan dengan anuitas hidup atau *annuity life*. Sebagai contoh sering kita melihat orang tua atau kakek kita tiap tanggal 4 awal bulan datang ke kantor pos atau bank untuk mengambil uang pensiun mereka. Para pensiunan masih akan menerima pembayaran dari pemerintah selama mereka (suami istri) masih hidup. Jika mereka (suami istri) sudah meninggal, maka secara otomatis tidak menerima uang pensiun lagi.

Pada modul ini, kita akan menfokuskan untuk mempelajari anuitas pasti. Untuk istilah anuitas pasti, biasanya kata **pasti**-nya tidak disertakan dan hanya menuliskan kata anuitas saja. Istilah anuitas biasanya merujuk pada anuitas pasti.

Anuitas Akhir

Anuitas Akhir sering juga disebut dengan anuitas biasa atau anuitas ordinary. Sekarang kita lihat suatu anuitas dengan pembayaran 1 rupiah yang **dibayarkan pada akhir periode selama n periode**. Anuitas yang pembayarannya pada akhir periode disebut dengan anuitas akhir atau *annuity-immediate*. Pada anuitas akhir ini, suku bunga perperiode juga dilambangkan dengan i. Nilai sekarang (*present value*) dari anuitas akhir ini dilambangkan dengan $a_{\overline{n|}}$. Nilai ini adalah nilai yang dibayarkan diawal untuk mendapatkan pembayaran sebesar 1 rupiah tiap akhir periode selama n periode. Sedangkan nilai akumulasi atau nilai masa mendatang dari anuitas tersebut dilambangkan dengan $s_{\overline{n|}}$.

Kita dapat menurunkan gambaran untuk nilai sekarang suatu anuitas akhir $a_{\overline{n|}}$ sebagai suatu present value dari masing-masing pembayaran. Present value dari pembayaran 1 rupiah di akhir periode pada periode pertama adalah *v*. Sedangkan present value dari pembayaran 1 rupiah yang dilakukan pada akhir periode ke dua adalah v^2. Proses ini berlanjut sampai present value dari pembayaran 1 pada periode terakhir n adalah v^n. Nilai akumulasi total dari present value $a_{\overline{n|}}$ sama dengan jumlahan dari present value tiap-tiap pembayaran, yaitu

$$a_{\overline{n|}} = v + v^2 + \ldots + v^{n-1} + v^n \tag{3.1}$$

Formula present value anuitas akhir di atas tidak efisient untuk nilai *n* yang besar. Dapat dilihat bahwa rumus (3.1) merupakan bentuk dari deret geometri *n*-suku dengan nilai awal *v* , dengan faktor *v*. Selanjutnya dengan menggunakan deret geometri diperoleh hasil

$$\begin{aligned} a_{\overline{n|}} &= v + v^2 + \ldots + v^{n-1} + v^n \\ &= v\,\frac{1-v^n}{1-v} \\ &= v\,\frac{1-v^n}{iv} \\ &= \frac{1-v^n}{i} \end{aligned} \tag{3.2}$$

Nilai akumulasi dari anuitas akhir dapat diturunkan dengan cara analog seperti menurunkan nilai present value suatu anuitas akhir. Nilai akumulasi dari pembayaran 1 rupiah pada akhir periode pertama adalah $(1+i)^{n-1}$. Nilai akumulasi dari pembayaran 1 rupiah pada akhir periode kedua adalah $(1+i)^{n-2}$. Proses ini berlanjut sampai pada nilai akumulasi pembayaran 1 rupiah saat periode terakhir *n*, yang sama dengan 1. Nilai akumulasi total anuitas akhir $s_{\overline{n|}}$ sama dengan jumlahan dari nilai akumulasi pembayaran tiap-tiap periode.

$$s_{\overline{n|}} = 1 + (1+i) + \ldots + (1+i)^{n-2} + (1+i)^{n-1} \tag{3.3}$$

Sekali lagi formula di atas tidak efisient untuk nilai *n* yang besar. Dapat dilihat bahwa rumus (3.3) merupakan bentuk dari deret geometri *n*-suku dengan nilai awal *v* , dengan faktor *v*. Selanjutnya dengan menggunakan deret geometri diperoleh hasil

$$\begin{aligned} S_{\overline{n|}} &= 1 + (1+i) + \ldots + (1+i)^{n-2} + (1+i)^{n-1} \\ &= 1\,\frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)-1} \\ &= \frac{(1+i)^n - 1}{i} \\ &= (v^{-n} - 1)/\,i \end{aligned} \tag{3.4}$$

Nilai dari pada beberapa suku bunga dan beberapa nilai n dari 1 sampai 50 sudah ditabelkan dan dapat anda lihat pada Lampiran I. Jika anda lihat dari notasi $a_{\overline{n}|}$ dan $s_{\overline{n}|}$, suku bunganya tidak diikutkan dalam kedua notasi tersebut. Kadang-kadang saja notasi suku bunga diikutkan jika ada ambiguitas berkaitan dengan suku bunga yang akan dipakai.

Ada hubungan yang cukup sederhana antara $a_{\overline{n}|}$ dan $s_{\overline{n}|}$ sebagai berikut:

$$
\begin{aligned}
a_{\overline{n}|}(1+i)^n &= \frac{1-v^n}{i}(1+i)^n \\
&= \frac{(1+i)^n - (1+i)^n v^n}{i} \\
&= \frac{(1+i)^n - 1}{i} \\
&= s_{\overline{n}|}
\end{aligned}
$$

Hubungan di atas cukup jelas diturunkan dari persamaan (3.2) dan (3.4). Hubungan yang lain yang dapat kita buat antara $a_{\overline{n}|}$ dan $s_{\overline{n}|}$ adalah

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{s_{\overline{n}|}} + i = \frac{i}{(1+i)^n - 1} + i &= \frac{i + i(1+i)^n - i}{(1+i)^n - 1} \\
&= \frac{i}{\dfrac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^n}} = \frac{i}{1-v^n} \\
&= \frac{1}{a_{\overline{n}|}}
\end{aligned}
$$

Contoh 3.1.1

Carilah nilai uang sekarang atau nilai tunai (present value) (dalam jutaan rupiah) dari suatu anuitas yang membayar 4 juta pada akhir tengah tahunan selama 16 tahun dengan suku bunga 8% (convertible semiannually atau konversi 6 bulanan)

Jawab.

Nilai yang dicari adalah present value dari suatu anuitas selama 32 periode dengan suku bunga 4% dan pokok 4 juta rupiah.

$$4 \times a_{\overline{32}|0,04} = 4 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{1,04}\right)^{32}}{0,04}$$
$$= 4 \times 17,87355$$
$$= 71,4942$$

Jadi jika anda membayar 71,4942 juta rupiah sekarang, maka selama 16 tahun anda akan mendapat pembayaran 4 juta rupiah setiap akhir tengah tahunan.

Contoh 3.1.2

Pada tanggal 1 january 2000 anda membuka tabungan yang tetap anda biarkan kosong sampai akhir tahun. Pada tanggal 31 Desember 2000 anda memulai menabung sebesar 2 jt. Selanjutnya setiap 31 Desember anda menabung 2 jt sampai tahun 2011. Tabungan tersebut anda biarkan selama 4 tahun dan tentu saja mendapat bunga. Jika diketahui i = 5%, Berapa jutakah total tabungan pada 31 Desember 2015 ?

a. 38,69473 b. 36,89473
c. 39,86473 d. 38,96473

Jawab :

Proses di atas adalah proses anuitas akhir yang dilanjutkan dengan pembungaan majemuk. Nilai akumulasi tabungan yang dicari adalah:

$$2\ s_{\overline{12}|}\left(1,05\right)^{4} = 2\frac{\left(1+0,05\right)^{12}-1}{0,05}\left(1,05\right)^{4}$$
$$= 38,69473$$

Anuitas Awal

Anuitas awal sering juga disebut dengan anuitas jatuh tempo atau anuitas-due. Pada kegiatan sebelumnya, anuitas akhir didefinisikan sebagai anuitas atau rangkaian pembayaran yang dilakukan pada akhir periode selama n periode. Bagaimana jika pembayaran anuitas yang anda lakukan di awal tahun ? Rangkaian pembayaran seperti yang disebutkan tadi, dinamakan dengan anuitas awal atau (*annuity-due*). Perlu anda ketahui, penggunaan istilah *annuity-immediate* dan *annuity-due* tidak menggambarkan sifat dari kedua anuitas tersebut.

Nilai sekarang (*present value*) dari anuitas awal dilambangkan dengan $\ddot{a}_{\overline{n}|}$. Nilai ini adalah nilai yang dibayarkan untuk mendapatkan pembayaran sebesar 1 rupiah tiap awal periode selama *n* periode. Sedangkan nilai akumulasi atau nilai masa mendatang dari anuitas tersebut dilambangkan dengan $\ddot{s}_{\overline{n}|}$.

Sekali lagi Kita dapat menurunkan gambaran untuk nilai sekarang suatu anuitas akhir $\ddot{a}_{\overline{n}|}$ sebagai suatu present value dari masing-masing pembayaran. Present value dari pembayaran 1 rupiah di awal periode pada periode pertama adalah 1. Sedangkan present value dari pembayaran 1 rupiah yang dilakukan pada awal periode ke dua adalah *v*. Proses ini berlanjut sampai present value dari pembayaran 1 pada periode terakhir n adalah v^{n-1}. Nilai akumulasi total dari present value $\ddot{a}_{\overline{n}|}$ sama dengan jumlahan dari present value tiap-tiap pembayaran, yaitu

$$\ddot{a}_{\overline{n}|} = 1 + v + v^2 + \ldots + v^{n-2} + v^{n-1} \qquad (3.7)$$

Dapat dilihat bahwa rumus (3.7) merupakan bentuk dari deret geometri *n*-suku dengan nilai awal 1 , dengan faktor *v*. Selanjutnya dengan menggunakan deret geometri diperoleh hasil

$$\begin{aligned}\ddot{a}_{\overline{n}|} &= 1 + v + v^2 + \ldots + v^{n-1} \\ &= 1\frac{1-v^n}{1-v} = \frac{1-v^n}{iv} \qquad (3.8) \\ &= \frac{1-v^n}{d}\end{aligned}$$

Secara sama dapat diturunkan rumus untuk nilai akumulasi anuitas awal selama n periode $\ddot{s}_{\overline{n}|}$

$$\begin{aligned}\ddot{s}_{\overline{n}|} &= (1+i) + (1+i)^2 \ldots + (1+i)^{n-1} + (1+i)^n \\ &= (1+i)\frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)-1} \\ &= \frac{(1+i)^n - 1}{d}\end{aligned}$$

Contoh 3.1.3

Nilai sekarang dari suatu anuitas awal untuk n periode $\ddot{a}_{\overline{n}|}$ dapat direpresentasikan dengan

a. $a_{\overline{n}|} + 1 - v$ b. $a_{\overline{n}|} + 1 - v^n$

c. $a_{\overline{n}|} + 1 - d^n$ d. $a_{\overline{n}|} + v^n$

Jawab.

$$\ddot{a}_{\overline{n}|} = \frac{1-v^n}{\frac{i}{1+i}} = a_{\overline{n}|}(1+i)$$

$$= a_{\overline{n}|} + a_{\overline{n}|} i$$

$$= a_{\overline{n}|} + 1 - v^n$$

Contoh 3.1.4

Pada tanggal 1 january 2008, Herni memutuskan memulai menabung untuk program pensiunnya sebesar X rupiah. Program tersebut dilanjutkan tiap tanggal 1 january sampai tahun 2022. Pada tanggal 31 Desember 2022, tabungannya berjumlah 386.310.200. Jika suku bunga efektif i = 6,5%, berapakah besarnya uang yang disetorkan Herni tiap awal tahun ? (juta)

a. 14 b. 15 c. 16 d. 17

Jawab :

Program di atas adalah program anuitas awal, sehingga diperoleh hubungan

$$X\,\ddot{S}_{\overline{15}|} = 386.310.200$$

$$\ddot{S}_{\overline{15}|} = \frac{(1{,}065)^{15} - 1}{0{,}065 / 1{,}065} = 25{,}754$$

$$X = \frac{386.310.200}{25{,}754} = 15 \text{ juta}$$

Jadi uang yang ditabungkan herni tiap awal tahun sebesar 15 juta rupiah.

Ada hubungan yang cukup sederhana antara $\ddot{a}_{\overline{n}|}$ dan $\ddot{S}_{\overline{n}|}$ sebagai berikut:

$$\ddot{a}_{\overline{n}|}(1+i)^n = \frac{1-v^n}{d}(1+i)^n$$

$$= \frac{(1+i)^n - (1+i)^n v^n}{d}$$

$$= \frac{(1+i)^n - 1}{d}$$

$$= \ddot{S}_{\overline{n}|}$$

Hubungan yang lain yang dapat kita buat antara $\ddot{a}_{\overline{n}|}$ dan $\ddot{S}_{\overline{n}|}$ adalah

$$\frac{1}{\ddot{s}_{\overline{n}|}} + d = \frac{d}{(1+i)^n - 1} + d = \frac{d + d(1+i)^n - d}{(1+i)^n - 1}$$

$$= \frac{d}{\dfrac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^n}} = \frac{d}{1 - v^n}$$

$$= \frac{1}{\ddot{a}_{\overline{n}|}}$$

Kita juga dapat membuat hubungan antara anuitas awal dan anuitas akhir seperti :

$$\ddot{a}_{\overline{n}|} = a_{\overline{n}|}(1+i)$$

Dan

$$\ddot{S}_{\overline{n}|} = S_{\overline{n}|}(1+i)$$

Serta

$$\ddot{a}_{\overline{n}|} = a_{\overline{n-1}|} + 1$$